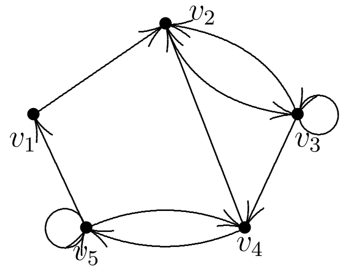
Rozložitelnost matic 3

Zjistěte, zda je matice A rozložitelná nebo slabě rozložitelná, a pokud ano, najděte příslušnou permutaci řádků a sloupců.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

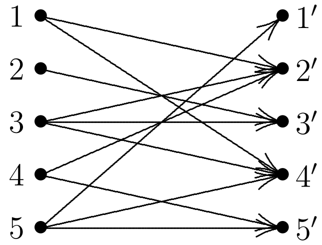
Řešení.

1. Sestrojíme diagram $\overrightarrow{G}(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$:



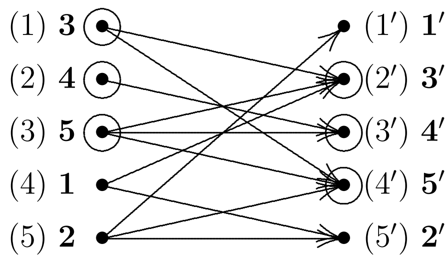
   $\overrightarrow{G}(\mathbf{A})$ je silně souvislý a tedy $\mathbf{A}$ je nerozložitelná.
   Zjistíme tedy, jestli $\mathbf{A}$ není alespoň slabě rozložitelná.

2. Sestrojíme bigraf $\overrightarrow{B}(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$:



   Pro $S = \{1, 2, 3\}$ je $N(S) = \{2', 3', 4'\}$.
   Tedy $|N(S) \leq |S|$, tj. množina S je stabilní.

3. Přečíslujeme uzly $\overrightarrow{B}(\mathbf{A})$ tak, že nejprve číslujeme uzly mimo S (resp. mimo $N(S)$) a pak uzly v S (resp. v $N(S)$). Množiny S a $N(S)$ jsou označeny kroužky, stará čísla uzlů jsou opět v závorkách a nová jsou tučně.



4. Porovnáním starých a nových čísel uzlů dostáváme permutace, které rozkládají matici $\mathbf{A}$:

Řádky

Stará čísla uzlů	1	2	3	4	5
Nová čísla uzlů	3	4	5	1	2

Sloupce

Stará čísla uzlů	1	2	3	4	5
Nová čísla uzlů	1	3	4	5	2

5. Provedením nalezených permutací na řádky a sloupce matice $\mathbf{A}$ postupně dostaneme

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$